О возвращаемости в среднем.

Шкредов И.Д.

1. Введение.

Пусть X - метрическое пространство с метрикой $d(\cdot,\cdot)$ и сигма-алгеброй измеримых множеств Φ, которая содержит все борелевские множества.

Пусть также T - измеримое, сохраняющее меру μ отображение X в себя. Всюду ниже будем считать, что $\mu(X) = 1$. Хорошо известная **теорема Пуанкаре о возвращении** [1] гласит, что почти каждая точка X возвращается, т.е. для п.в. $x \in X$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \forall K > 0 \ \exists t > K : d(T^t x, x) < \varepsilon.$$

Рассмотрим меру $H_h(\cdot)$ на X, определенную следующим образом

$$H_h(E) = \lim_{\delta \to 0} H_h^\delta(E),$$

где $h(t)$ - неотрицательная ($h(0) = 0$) непрерывная возрастающая функция, а $H_h^\delta(E) = \inf\{\sum h(\delta_j)\}$, где inf берется по не более чем счетным покрытиям E открытыми множествами $\{B_j\}$, $diam(B_i) = \delta_j < \delta$.

Если $h(t) = t^\alpha$, то получаем обычную меру Хаусдорфа $H_\alpha(\cdot)$.

Следующие ниже теоремы 1.1 и 1.2 были доказаны М. Бошерницаном в [2]. (Похожий результат независимо получил Н.Г. Мощевитин в [3]).

Теорема 1.1 *Пусть X - метрическое пространство, имеющее $H_\alpha(X) = C < \infty$, а T - отображение X в себя, сохраняющее меру μ. Тогда для п.в. $x \in X$ выполнено* $\liminf_{n\to\infty}\{n^\beta \cdot d(T^n x, x)\} < \infty$ *, где $\beta = 1/\alpha$.*

Будем говорить, что меры μ и H_h согласованы, если любое μ измеримое множество является H_h измеримым.

Теорема 1.2 *Пусть X - метрическое пространство, H_α и μ согласованы, для любого μ - измеримого A $\mu(A) = H_\alpha(A)$ и T - отображение X в себя, сохраняющее меру μ.*

Тогда для п.в. $x \in X$ выполнено $\liminf_{n\to\infty}\{n^\beta \cdot d(T^n x, x)\} \le 1$ *, где $\beta = 1/\alpha$.*

В данной заметке установлено среднее значение для констант локальной возвращаемости и N - возвращаемости, найдена константа возвращаемости для топологического случая. Использованные конструкции развивают подход из работ [2,3].

2. Результат о возвращении в среднем.

Сформулируем наш основной результат о возвращаемости в среднем.

Теорема 2.1 *Пусть X - метрическое пространство, имеющее $H_h(X) = C < \infty$, а T - отображение X в себя, сохраняющее меру μ. Будем считать, что μ и H_h согласованы.*
Рассмотрим функцию $C(x) = \liminf_{n\to\infty}\{n \cdot h(d(T^n x, x))\}$.
Тогда $C(x)$ интегрируемая (по мере μ) функция и для любого μ измеримого A выполнено

$$\int_A C(x)d\mu \leq H_h(A).$$

Если же $H_h(A) = 0$, то $\int_A C(x)d\mu = 0$ без условия согласованности мер μ и H_h.

Замечание. Согласно примеру из §7 работы [2] оценка в теореме 2.1 является неулучшаемой.

Доказательство теоремы. Для начала докажем (по аналогии с [2]), что $C(x)$ измеримая функция.
Докажем, что для любого a, множество :

$$W = \{x \in X \mid C(x) > a\} \ - \ \mu \ - \ .$$

Действительно, для любого $u > 0$, множества

$$W(u) = \{x \in X \mid \forall n \geq 1, \ , \ \ d(T^n x, x) < u$$

$$n \cdot h(d(T^n x, x)) > a + u\}$$

– μ – измеримы и

$$W = \bigcup_{k=1}^{\infty} W(\frac{1}{k}).$$

Т.е. $C(x)$ - измеримая функция.
Следующая лемма общеизвестна (см.[2]).

Лемма 1. *Если $Y - \mu$ измеримое множество, $t \geq 1$,*

$$Y(t) := \{x \in Y \mid T^i x \notin Y \quad i, 1 \leq i \leq t\}.$$

Тогда $\mu(Y(t)) \leq 1/t$.

Лемма 2. *Для любого измеримого V с $H_h(V) < c\mu(V)$ существует множество $F \subseteq V$, $\mu F > 0$, что для любого $x \in F$ $C(x) < c$.*

В теореме М. Бошерницана [2] аналог множества W имеет меру, близкую

к $\mu(V)$, но значение константы возвращения не отслеживается. В нашей лемме мера W мала, но устанавливается ограничение на $C(x)$.
Доказательство леммы. Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Пусть $H_h(V) \neq 0$. Положим $\kappa = H_h(V)/\mu(V) < 1$ и выберем параметр p так, что $1 < p$ и $p^3 < 1/\kappa$. Возьмем покрытие V множествами $\{U_i\}$ с $diam(U_i) = r_i < \varepsilon$, так что $\sum_{i\geq 0} h(r_i) < c'$, где $c' = H_h(V)p$. Можно считать U_i не обязательно открытыми, но не пересекающимися. Введем множество индексов :

$$J = \{i \mid c'pu_i < h(r_i)\mu(V)\}, \tag{1}$$

где $u_i = \mu(U_i)$. Тогда

$$\sum_{i\in J} u_i < \frac{\mu(V)}{c'p} \sum h(r_i) < \frac{\mu(V)}{p} \quad \sum_{i\notin J} u_i > \mu(V)(1 - \frac{1}{p}) \tag{2}$$

Для $i \notin J$ введем, как в лемме 1, множества $U_i(t_i)$ с $\mu(U_i(t_i)) \leq 1/t_i$, где $t_i = c/ph(r_i)$, т.е.

$$\mu(U_i(t_i)) \leq \frac{ph(r_i)}{c} \leq \frac{c'p^2u_i}{c\mu(V)} = \frac{u_iH_h(V)p^3}{c\mu(V)} = u_ip^3\kappa < u_i.$$

Рассмотрим множества:

$$G(\varepsilon) = \bigcup_{i\in J} U_i \bigsqcup \bigcup_{i\notin J} U_i(t_i) \quad F(\varepsilon) = V \setminus G(\varepsilon).$$

Тогда

$$\mu(G(\varepsilon)) \leq \sum_{i\in J} u_i + \sum_{i\notin J} u_ip^3\kappa = \mu(V) - \sum_{i\notin J} u_i + \sum_{i\notin J} u_ip^3\kappa =$$

$$= \mu(V) - \sum_{i\notin J} u_i(1 - p^3\kappa).$$

Таким образом используя (2) получаем

$$\mu(F(\varepsilon)) \geq (1 - p^3\kappa) \sum_{i\notin J} u_i > \mu(V)(1 - p^3\kappa)(1 - \frac{1}{p}). \tag{3}$$

Отсюда для любого $x \in F(\varepsilon)$, $x \in U_i$ существует натуральное k, $1 \leq k \leq t_i$, что $T^kx \in U_i$ и $d(T^kx, x) < r_i$. Т.е.

$$h(d(T^kx, x)) < h(r_i) = \frac{c}{pt_i} \leq \frac{c}{pk}.$$

Теперь берем последовательность $\{\varepsilon_i\}, \varepsilon_i \to 0$ и множество

$$F = \bigcap_{k\geq 1} \bigcup_{i\geq k} F(\varepsilon_i) = \{x \in X \mid x \in F(\varepsilon_i) \quad F(\varepsilon_i)\} \tag{4}$$

Тогда $\mu(F) \geq \mu(V)(1-p^3\kappa)(1-\frac{1}{p}) > 0$, и для любого $x \in F$

$$\liminf\{n \cdot h(d(T^n x, x))\} \leq c/p < c. \tag{5}$$

Если же $H_h(V) = 0$, то $\kappa = 0$. В этом случае возьмем произвольное $0 < c < 1$, параметр $p > 1$ и покрытие V множествами $\{U_i\}$ с $diam(U_i) = r_i < \varepsilon$, так что $\sum_{i\geq 0} h(r_i) < c'$, где $c' = c^2\mu(V)/p^2$. Вводим, по формуле (1) множество индексов J, тогда

$$\sum_{i\in J} u_i < \frac{\mu(V)}{p} \quad \sum_{i\notin J} u_i > \mu(V)(1-\frac{1}{p})$$

Для $i \notin J$ введем множества $U_i(t_i)$ с $\mu(U_i(t_i)) \leq 1/t_i$, где $t_i = c/ph(r_i)$, т.е.

$$\mu(U_i(t_i)) \leq \frac{ph(r_i)}{c} \leq \frac{c'p^2u_i}{c\mu(V)} = u_i < u_i.$$

И, действуя, аналогично случаю $H_h(V) \neq 0$, получаем вместо (3)

$$\mu(F(\varepsilon)) \geq (1- \;) \sum_{i\notin J} u_i > \mu(V)(1- \;)(1-\frac{1}{p}).$$

Откуда для любого $x \in F(\varepsilon)$, $x \in U_i$ существует натуральное k,
$1 \leq k \leq t_i$, что $T^k x \in U_i$ и $d(T^k x, x) < r_i$. Т.е.

$$h(d(T^k x, x)) < h(r_i) = \frac{c}{pt_i} \leq \frac{c}{pk}.$$

Следовательно, для $\forall x \in F$ (F определено, опять же, по формуле (4), $\mu F > 0$) имеет место (5). Лемма 2 доказана.
Докажем теперь теорему 2.1. Возьмем произвольное измеримое множество A. Будем считать, что $\mu(A) > 0$. Возьмем любое натуральное n и введем множества уровней для $C(x)$:

$$A_j = \{x \in A \mid \frac{j-1}{2^n} \leq C(x) < \frac{j}{2^n}\}, \quad j = 1\ldots 2^n \cdot n, \; M(n) = \bigsqcup_{j=1}^{2^n n} A_j$$

$$B(n) = \{x \in A \mid n \leq C(x)\}.$$

Тогда

$$\int_{M(n)} C(x) d\mu \leq \sum_{j=1}^{2^n n} \mu A_j \frac{j}{2^n}.$$

В случае согласованности μ и H_h из леммы 2 следует, что $H_h(A_j) \geq \frac{j-1}{2^n} \mu(A_j)$, значит,

$$\sum_{j=1}^{2^n n} \mu A_j \frac{j}{2^n} \leq H_h(A) + \sum_{j=1}^{2^n n} \frac{\mu A_j}{2^n} \leq H_h(A) + \frac{1}{2^n} \tag{6}$$

Опять же из леммы 2 получаем

$$\mu B(n) \leq \frac{H_h(B(n))}{n} \leq \frac{C}{n}.$$

Если же $H_h(A) = 0$, то $\mu(A_j) = 0 \ \forall j \neq 1$, $\sum_{j=1}^{2^n n} \mu A_j \frac{j}{2^n} \leq \frac{1}{2^n}$ и $\mu B(n) = 0$. Рассмотрим измеримые неотрицательные функции $f_n : f_n(x) = C(x)$ на $M(n)$ и $f_n(x) = 0$ на $B(n)$. Так как $\mu B(n) \to 0$ при $n \to \infty$, то $f_n \to f$ п.в. и из неравенства (6) получаем, что $\int_A f_n d\mu \leq H_h(A) + \frac{1}{2^n}$. Тогда по теореме Фату вытекает утверждение теоремы. Если же мера A равна нулю, то доказывать нечего ($C(x)$ интегрируема т.к. $\mu(X) = 1 > 0$). Теорема доказана.

3. Некоторые следствия из теоремы 2.1

Замечание 1. Так как интегрируемая функция п.в. ограничена, то в случае согласованности мер μ и H_α из теоремы 2.1 вытекает теорема 1.1.
Замечание 2. Из теоремы 2.1 следует теорема 1.2.

Следствие 1. Для множества E с $H_\alpha(E) = 0$, либо $\mu(E) = 0$, либо $C(x) = 0$ μ - п.в. на E. В частности, если $C(x) > 0$ μ - п.в. на X, то мера μ абсолютно непрерывна относительно меры H_α.

Следствие 2. Пусть $0 < C = H_\alpha(X) < \infty$.
(а) Если $C(x) = C$ п.в. (μ), то для любого μ - измеримого E $\mu(E) = H_\alpha(E)/C$ и μ - эргодична.
(б) Если существует множество A положительной меры, что $\mu(A) \neq H_\alpha(A)/C$, то заменяя, если необходимо A на $X \setminus A$, получаем $H_\alpha(A) < C\mu(A)$. Следовательно, в A существует множество положительной меры на котором $C(x) < C$, т.е. там константа возвращения меньше.
Итак, свойство (б) очевидно. Докажем (а). Пусть существует разбиение X на T - инвариантные множества положительной меры A_1 и A_2, $\mu(A_j) \neq$

$0,1,\ j=1,2$. Если бы $H_\alpha(A_1)$ или $H_\alpha(A_2)$ была равна 0, то по теореме 2.1 $C(x)=0$ на множестве положительной меры. Таким образом, $0<H_\alpha(A_1)<C$ и опять из теоремы, для меры $\mu_1(E):=\mu(E\cap A_1)/\mu(A_1)$ имеем $C(x)<C$ на множестве положительной меры в A_1. Но тогда $C(x)<C$ на множестве положительной меры в A_1 и для меры μ.

этого рассуждения видно, что для не эргодических преобразований существует множество точек положительной меры на котором $C(x)\le C/n$, где n - число эргодических компонент.

Следствие 3. Пусть мера H_α/C сохраняется и эргодична. Тогда $C(x)=0$ п.в. для любой другой сохраняемой эргодической меры.

Следствие 3 вытекает из того, что любые две эргодические меры сингулярны (см., например, [6]), то есть, для H_α и другой эргодической меры μ существует множество B с $H_\alpha(B)=0$ и $\mu(B)=1$. Значит, по теореме 2.1 $C(x)=0$ μ п.в.

Пример. Пусть $m\ge 2$ целое. В [4] доказано, что для преобразования $Tx=mx\ (mod\ 1)$ $C(x)=0$ п.в. в смысле меры Лебега. Из следствия 3 вытекает $C(x)=0$ п.в. для любой меры (см. также [2]).

Следствие 4. Пусть X - компактное метрическое пространство, имеющее $H_h(X)=C<\infty$, а T - непрерывное отображение X в себя.
Тогда существует $x\in X$, что $\liminf\{n\cdot h(d(T^nx,x))\}\le C$.

Следствие 4 вытекает из теоремы Боголюбова-Крылова (см., например, [7]).

4. Об N - возвращаемости.

Определение 1. Пусть G вполне ограниченное подмножество в X. *ε - энтропией* множества G (следуя А.Н. Колмогорову [5]) называется величина $H_\varepsilon(G,X)=log_2 N_\varepsilon(G,X)$, где $N_\varepsilon(G,X)$ - наименьшее количество точек которое может быть в ε - сети этого множества. Обозначим $N_\varepsilon(X)=N_\varepsilon(X,X)$.

Если X вполне ограничено, то $N_\delta(X)$ конечно для любого δ и имеет место неравенство $\sum h(\delta_j)\le N_\delta(X)h(\delta)$. Следовательно, если $N_\delta(X)\le C/h(\delta)$ (h - функция из определения H_h), то $H_h(X)\le C$.

Определение 2. Возьмем произвольное натуральное N. Функцию $C_N(x)=\min\{\ d(T^nx,x)\mid 1\le n\le N\ \}$ назовем N - константой возвращаемости для точки x.

Сформулируем наш второй основной результат.

Теорема 4.1 *Пусть X - вполне ограниченное метрическое пространство с метрикой $d(\cdot,\cdot)$, функцией $N(x)=N_x(X)$, $diam(X)=1$ и T - отображение X в себя, сохраняющее меру μ.*

Пусть $A \subseteq X$ - любое μ измеримое множество и $g(x)$ действительная не убывающая функция, ограниченная на $[0,1]$, такая что для любого $t \in (0,1]$ существует интеграл Стилтьеса $\int_t^1 N_A(x)dg(x)$, где $N_A(x) = \min(\mu(A), N_x(A,X)/N)$. Тогда выполнено следующее неравенство

$$\int_A g(C_N(x))d\mu \leq \inf\{ \ t \mid g(t)\mu(A) + \int_t^1 N_A(x)dg(x) \ \}.$$

Замечание. 1. Условие $diam(X) = 1$ необременительно, ибо можно заменить метрику $d(\cdot,\cdot)$ на метрику $\widetilde{d}(\cdot,\cdot) = d(\cdot,\cdot)/diamX$.
2. При $g(x) = x$ теорема 4.1 дает оценку среднего значения для $C_N(x)$, при $g(x) = x^k$ теорема 4.1 дает оценку среднего значения для k - го момента $C_N(x)$.
В случае $N_\varepsilon \leq (1/\varepsilon)^d$, d - натуральное ($X \subseteq R^d$) теорема 4.1 дает оценку

$$\int_X C_N(x)d\mu \leq \frac{\ln N}{N} \ (d=1) \quad \int_X C_N(x)d\mu \leq \frac{d}{(d-1)N^{1/d}} \ (d \geq 2).$$

Доказательство. Так как $C_N(x) \leq 1$, а $g(x)$ ограничена, то интеграл в левой части существует. Возьмем произвольное натуральное m и числа $t_1 = t < t_2 < \ldots < t_m = 1$. Введем множества уровней для $C_N(x)$

$$A_1 = \{x \in A \mid 0 < C_N(x) \leq t_1\}, \ A_2 = \{x \in A \mid t_1 < C_N(x) \leq t_2\}, \ \ldots \ ,$$

$$A_m = \{x \in A \mid t_{m-1} < C_N(x) \leq t_m\} \ \ B = \{x \in A \mid C_N(x) = 0\}.$$

Пусть $a_j = \mu(A_j), b = \mu(B), a = \mu(A)$, тогда $\sum_{j=1}^m a_j + b = a$ и

$$\int_A g(C_N(x))d\mu \leq \sum_{j=1}^m g(t_j)a_j + g(0)b = \sum_{j=1}^m (g(t_j) - g(0))a_j + g(0)a \qquad (7)$$

Для $l \geq 2$ имеем $C_l := \bigcup_{j=l}^m A_j = \{x \in A \mid t_{l-1} < C_N(x)\}$. Оценим меру C_l. Покроем A множествами U_i с $diam(U_i) \leq t_{l-1}$ в количестве $N(t_{l-1}) = N_{t_{l-1}}(A,X)$ штук. Мера каждого $V_i = U_i \cap C_l$ не превосходит $1/N$. Действительно, в противном случае, по лемме 1 в V_i существует точка с $d(T^n x, x) \leq t_{l-1}$, $1 \leq n \leq N$, т.е. точка у которой $C_N(x) \leq t_{l-1}$, что противоречит определению C_l. Таким образом $\sum_{j=l}^m a_j = \mu(C_l) \leq N(t_{l-1})/N$. Ясно, так же, что $\mu(C_l) \leq a$ и $\sum_{j=1}^m a_j \leq a$.
Мы получили задачу линейного программирования :

1) $\sum_{j=1}^m (g(t_j)-g(0))a_j \to \max$; 2) $\sum_{j=l}^m a_j \le c_l := \min(a, N(t_{l-1})/N),\ l \ge 2$, $\sum_{j=1}^m a_j \le a$; 3) $a_j \ge 0$.
Решая ее (например симплекс-методом [8]) находим, что максимальное значение (7) при фиксированном наборе $t_1, t_2, \ldots, t_m$ достигается на $a_1 = a - c_2, a_2 = c_2 - c_3,\ \ldots\ , a_{m-1} = c_{m-1} - c_m, a_m = c_m$ и равно

$$c_m(g(t_m)-g(0)) + \sum_{k=2}^{m-1}(c_k - c_{k+1})(g(t_k)-g(0)) + (a-c_2)(g(t_1)-g(0)) + g(0)a$$

$$= c_m g(t_m) + (a-c_2)g(t_1) + \sum_{k=2}^{m-1}(c_k - c_{k+1})g(t_k) =$$

$$c_m g(t_m) + (a-c_2)g(t_1) + \sum_{k=2}^{m-1} c_k(g(t_k) - g(t_{k-1})) + c_2 g(t_1) - c_m g(t_{m-1})$$

$$= \sum_{k=2}^{m} c_k(g(t_k) - g(t_{k-1})) + a g(t_1). \tag{8}$$

В силу определения интеграла Стилтьеса убеждаемся, что для произвольного $t \in (0,1]$ выполнено $\int_A g(C_N(x))d\mu \le a g(t) + \int_t^1 N_A(x)dg(x)$. Получили утверждение теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пуанкаре А. Новые методы небесной механики // Избранные труды. Т. 2. М.: Наука, 1972.

2. M.D. Boshernitzan. Quantitative recurrence results. Inventiones mathematicae, Vol. 113, Fasc. 3, 1993, p. 617.

3. Мощевитин Н.Г. Об одной теореме Пуанкаре. УМН, том 53, вып. 1, 1999.

4. Spitzer F. : Principles of Random Walk. Van Nostrand, 1964.

5. А.Н. Колмогоров. О некоторых асимптотических характеристиках вполне ограниченных метрических пространств. ДАН, том 108, 3, 1956.

6. J. Oxtoby. Ergodic sets. Bulletin of the American Mathematical Society 58 (1952), 116 - 136.

7. А.Б. Каток, Б. Хасселблат. Введение в современную теорию динамических систем. Факториал, Москва, 1999.

8. Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Краткий курс теории экстремальных задач. М.: Издательство МГУ, 1989.